Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N. 3, 247-286

Sur l'intégration des équations différentielles holomorphes réduites en dimension deux

M. Berthier et F. Touzet

Resumé. Le problème auquel on s'intéresse consiste à détecter parmi les formes réduites à l'origine de C^2 celles qui possèdent des intégrales premières liouvilliennes ou appartenant à la classe de Nilsson. Pour cela, on étudie l'espace des modules associé à une telle forme.

Mots Clefs: Feuilletages holomorphes, intégration, holonomie, singularités réduites, classification analytique, intégrales premières Nilsson, intégrales premières liouvilliennes.

Abstract. The problem we are interested in consists in listing the reduced forms at the origin of C^2 having a first integral of the liouvillian or Nilsson type. For this, we are led to study the moduli space associated to such a form.

Keywords: Holomorphic Foliations, integration, holonomy, reduced singularities, analytic classification, Nilsson first integrals, Liouvillian first integrals.

0. Introduction

Il est bien connu que les singularités des équations différentielles holomorphes à l'origine de C^2 sont désingularisables : on se ramène par une suite finie d'éclatements ponctuels à des équations modèles dites réduites ou simples. Le problème auquel on s'intéresse consiste à détecter parmi ces dernières celles qui possèdent des intégrales premières appartenant à l'une des deux classes suivantes.

1. La classe de Nilsson : elle est constituée des fonctions multiformes ayant un espace de déterminations de dimension finie sur C et qui sont à croissance modérée le long d'une hypersurface analytique. Ces fonctions correspondent naturellement aux objets que l'on obtient par prolongement analytique, leur nature est plutot géométrique.

Received 10 July 1998

2. La classe de Liouville : elle renferme des fonctions qui appartiennent à une extension différentielle du corps des fonctions méromorphes obtenue par adjonction d'éléments algébriques, de primitives et d'exponentielles de primitives et par itération finie de telles opérations. Résoudre une équation différentielle à variables séparées ou linéaire avec second membre relève par exemple de tels procédés. Dans ce cas, les objets étudiés sont de nature plus algébrique.

On ramène très vite le problème à des calculs de modules : en effet, les formes normales formelles des germes réduits possèdent toutes des intégrales premières Nilsson ou Liouville et il s'agit de déterminer les normalisations qui préservent l'existence de ces intégrales premières.

Nous montrons dans la première partie de cette étude qu'en présence d'intégrales premières dans la classe de Nilsson, les équations considérées sont analytiquement normalisables (i.e. les modules sont triviaux). Nous donnons de plus l'écriture explicite de ces intégrales par le biais d'un théorème de factorisation.

Le cas Liouville auquel est consacré la seconde partie est plus riche : il existe des équations réduites possédant des intégrales premières liouvilliennes et non analytiquement normalisables (l'équation d'Euler en est un exemple). Un tel phénomène ne se produit que pour des équations résonnantes (dégénérées ou non) et la démarche que l'on adopte alors consiste à mettre en évidence les contraintes qu'impose la présence d'un facteur intégrant généralisé sur les modules de l'holonomie pour la classification formelle - analytique. On obtient dans un premier temps la description complète des modules pouvant éventuellement intervenir (ce sont des couples formés de l'identité et de ramifications d'homographies et inversement); dans un second temps on s'intéresse à leur réalisation effective. On dresse alors la liste exhaustive des formes résonnantes dégénérées répondant à la question initiale. On discute ensuite du cas non dégénéré.

Ce travail s'inscrit dans l'effort de compréhension de ce que peut être un (pseudo) groupe de Galois pour une équation différentielle non linéaire du premier ordre. Sa motivation première est de déterminer les restrictions auquelles sont assujettis ces (pseudo) groupes lorsque les équations considérées possèdent des solutions "calculables". Nous introduisons à la fin de ce texte une notion de pseudo groupe de Galois pour un germe de difféomorphisme résonnant et montrons, de façon heuristique, comment les résultats mentionnés ci-dessus pourraient se "synthétiser" dans l'énoncé : un germe d'équation différentielle résonnante (dégénérée ou non) admet une intégrale première liouvillienne si et seulement si le pseudo groupe de Galois du difféomorphisme d'holonomie de sa séparatrice $x = 0$ est résoluble.

Signalons pour terminer deux références "historiques", [**10**] et [**1**], où l'on trouve déjà mentionnéees, parfois de façon très elliptique, certaines des questions qui nous ont préoccupés.

Nous remercions D. Cerveau et R. Moussu pour leurs avis et suggestions à propos de ce texte.

Contents

1. Rappels et définitions

Nous nous intéressons à des germes $\omega = 0$ d'équation différentielle tels que le 1-jet de ω s'écrive dans un système de coordonnées adéquat et à unité près : $j^1\omega = ydx + \lambda xdy$ où λ est un nombre complexe n'appartenant pas à $(\mathbb{Q}^-)^*$. De tels germes sont traditionnellement appelés *réduits* ou *simples*. Leur étude est motivée par le fait qu'ils apparaissent comme modèles finaux de désingularisation ([**8**]).

1.1. Linéarisation et normalisation

Il est bien connu que ω est analytiquement linéarisable dès que λ est dans le domaine de Poincaré, i.e. $\lambda \notin \mathbb{R}^+$. Lorsque λ est dans le domaine de Siegel, i.e. $\lambda \in \mathbb{R}^+$, il faut distinguer trois cas.

1. Lorsque λ est rationnel, éventuellement nul, l'équation est dite *résonnante.* La linéarisation (analytique ou formelle) est impossible en général.
2. Lorsque λ n'est pas rationnel et satisfait les conditions diophantiennes de Brujno, le germe d'équation $\omega = 0$ est analytiquement linéarisable.
3. Lorsque λ n'est pas rationnel et ne satisfait pas les conditions diophantiennes de Brujno, on ne peut que linéariser formellement l'équation, la présence de *petits diviseurs* entrainant des divergences.

Un germe ω de 1-forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est *résonnant dégénéré* si son 1-jet s'écrit dans un bon système de coordonnées: $j^1\omega =$

ydx (il s'agit du cas où λ est nul). On dispose pour un tel germe d'une mise sous forme normale analytique du type

$$\omega_a = x^{k+1}dy - A(x,y)dx, \quad A(0,y) = \mu y, \quad \mu \in \mathbb{C}^*,$$

et d'une mise sous forme normale formelle du type

$$\omega_f = x^{k+1}dy - y(1+\mu x^k)dx, \quad \mu \in \mathbb{C}.$$

On constate en particulier que la droite $x = 0$ est une séparatrice. On notera h son difféomorphisme d'holonomie évalué sur la transversale $y = 1$. Il résulte des travaux de J. Martinet et J.-P. Ramis que ω est analytiquement isomorphe à sa forme normale formelle si et seulement si h est holomorphiquement conjugué au difféomorphisme

$$h_f = exp\left(\frac{2i\pi z^{k+1}}{1+\mu z^k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

holonomie de ω_f.

Lorsque $\lambda = q/p$ où q et p sont deux entiers positifs premiers entre eux, on dit que ω est *résonnant non dégénéré* (ou simplement résonnant). Dans ce cas, il existe une mise sous forme normale analytique

$$\omega_a = pydx + qx(1 + (x^p y^q)^k A(x,y))dy$$

et une mise sous forme normale formelle

$$\omega_f = p(1 + (\mu - 1)(x^p y^q)^k)ydx + q(1 + \mu(x^p y^q)^k)xdy\ .$$

Contrairement au cas dégénéré, le germe ω possède toujours deux séparatrices d'équation $x = 0$ et $y = 0$. Le difféomorphisme h_f de la séparatrice $x = 0$ de ω_f évalué sur la transversale $y = 1$ a pour expression

$$h_f = e^{-2i\pi q/p} exp\left(2i\pi\frac{z^{pk+1}}{1+\frac{(\mu-1)p}{q}z^{pk}}\frac{\partial}{\partial z}\right)\ .$$

Notons encore que l'équation $\omega_f = 0$ est l'image réciproque de l'équation

$$\underline{\omega}_f = (1 + (\mu - 1)(xy)^k)ydx + (1 + \mu(xy)^k)xdy = 0$$

par la ramification $(x, y) \longmapsto (x^p, y^q)$.

Par ailleurs, deux formes résonnantes non dégénérées sont holomorphiquement (resp. formellement) conjuguées si et seulement si les difféomorphismes d'holonomie correspondants sont holomorphiquement (resp. formellement) conjugués.

1.2. Intégrales premières dans la classe de Nilsson

Soit U un polydisque de $\mathbb{C}^2$ centré à l'origine et soit S une hypersurface analytique de U dont une équation est $s(x,y)=0$. Une fonction f est dans la classe de Nilsson sur U relativement à S si f est multiforme de détermination finie sur $U \setminus S$ et à croissance modérée le long de S. Précisons ce dernier point. Une fonction f multiforme sur $U \setminus S$ est à croissance modérée le long de S s'il existe un entier N strictement positif tel que pour toute détermination f_{p_0} de f, p_0 appartenant à $U \setminus S$, il existe une suite de réels positifs $(k_m)_{m\in\mathbb{N}}$ vérifiant: pour tout prolongement analytique $f_{p_0,\gamma}$ de f_{p_0} le long d'un chemin γ contenu dans $U \setminus S$ avec $\gamma(0)=p_0$ et $\gamma(1)=q$, on a

$$|f_{p_0,\gamma}(q)| < k_{\mathrm{Ind}(\gamma)}|s(q)|^{-N}$$

Comme cas particulier, signalons qu'une fonction uniforme sur $U \setminus S$ à croissance modérée le long de S n'est rien d'autre qu'une fonction méromorphe sur U à pôles sur S.

Dans le cas où S est une hypersurface à croisement normal, on dispose d'une écriture explicite pour les fonctions dans la classe de Nilsson. Ceci résulte du théorème classique suivant.

Théorème 1.1. *Si f est une fonction dans la classe de Nilsson sur U relativement à une hypersurface S d'équation $xy=0$ elle s'écrit*

$$f(x,y)\sum_{i=1}^{p} a_i(x,y)(logx)^{m_i}(logy)^{n_i}x^{\alpha_i}y^{\beta_i} \ ,$$

où les a_i sont des fonctions holomorphes sur U, m_i et n_i sont des entiers, α_i et β_i des nombres complexes. Lorsque S est l'hypersurface d'équation $x=0$, on a pour tout i, $n_i=\beta_i=0$.

Nous appelons dans la suite *intégrale première Nilsson* d'un germe ω de 1-forme holomorphe la donnée d'une fonction f dans la classe de Nilsson d'un ouvert U relativement à une hypersurface S avec les deux conditions suivantes : ω possède un représentant sur U et $\omega \wedge df = 0$.

1.3. Intégrales premières liouvilliennes

Notons $\mathbb{C}(x, y)$ le corps des fonctions méromorphes à l'origine de $\mathbb{C}^2$ muni des dérivations (∂_x, ∂_y). Une extension *liouvillienne* du corps différentiel $\mathbb{C}(x, y)$ est une extension différentielle (K, Δ) telle que

$$\mathbb{C}(x, y) \subset (K_1, \Delta_1) \subset \ldots \subset (K_n, \Delta_n) = (K, \Delta)$$

où

- le corps des constantes de (K, Δ) est $\mathbb{C}$ et $\Delta_i / K_{i-1} = \Delta_i$.
- Le corps $K_i = K_{i-1}(t_i)$ est une extension différentielle de K_{i-1} de l'un des types suivants:

1. t_i est algébrique sur K_{i-1};
2. pour toute dérivation δ de Δ_i, $\delta t_i / t_i$ est un élément de K_{i-1};
3. pour toute dérivation δ de Δ_i, δt_i est un élément de K_{i-1}.

Une fonction *liouvillienne* est par définition une fonction appartenant à une extension liouvillienne de $\mathbb{C}(x, y)$.

Exemple. Les fonctions dans la classe de Nilsson d'un ouvert U relativement à une hypersurface à croisement normal sont liouvilliennes.

De même que dans le cas Nilsson, une *intégrale première liouvillienne* d'un germe ω de 1-forme différentielle holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ est une fonction liouvillienne f qui satisfait $\omega \wedge df = 0$. Le théorème suivant est du à M. Singer ([**12**]), la version locale que nous utilisons est démontrée dans [**13**].

Théorème 1.2. *Si un germe ω de 1-forme holomorphe à l'origine de $\mathbb{C}^2$ possède une intégrale première liouvillienne, il existe un germe η de 1-forme méromorphe fermée tel que $d\omega = \eta \wedge \omega$.*

On dit alors que le germe η est un *facteur intégrant généralisé* de ω.

Remarque. Le facteur intégrant généralisé η est unique lorsque ω ne possède pas de facteur intégrant méromorphe.

Considérons un germe $\omega = 0$ d'équation différentielle réduite à l'origine de $\mathbb{C}^2$ possédant une intégrale première liouvillienne. Quitte à modifier les coordonnées, on se ramène au cas où la séparatrice analytique de ω est la droite $x = 0$ et le difféomorphisme h d'holonomie de cette dernière est évalué sur la droite $y = 1$. Il existe d'après le théorème de Singer un germe η de 1-forme méromorphe fermée tel que la forme

$$\beta = \frac{\omega}{exp(\int \eta)}$$

soit fermée. Notons β_0 la restriction de β à la droite $y = 1$. Le résultat suivant est évident.

Lemme 1.3. *Il existe un nombre complexe c_h non nul tel que $h^*\beta_0 = c_h\beta_0$.*

Remarque. Le théorème 1.2 donne une intégrale première liouvillienne à priori plus "simple" que celle de départ, il s'agit de la fonction

$$\int \frac{\omega}{exp(\int \eta)} .$$

2. Formes réduites et intégrales premières dans la classe de Nilsson

Nous démontrons dans un premier temps que les germes de 1-formes holomorphes réduits possédant des intégrales premières dans la classe de Nilsson sont analytiquement normalisables. Nous donnons ensuite la forme explicite de ces intégrales premières.

2.1. Un théorème de normalisation analytique

Soit U un polydisque centré en l'origine de $\mathbb{C}^2$ et $\omega = 0$ une équation différentielle réduite sur U. D'après 1.1, les séparatrices de ω forment une hypersurface analytique S de U dont l'équation est, dans un système de coordonnées adéquat, soit $x = 0$ soit $xy = 0$.

Lemme 2.1. *Une intégrale première Nilsson de ω est une fonction multiforme sur $U \setminus S$.*

Preuve. Soit X un ensemble analytique irréductible de U. Si X n'est pas une séparatrice de ω, il existe pour tout point p de X, un voisinage V de p dans U arbitrairement petit et des coordonnées (u, v) sur V tels que:

– la restriction de X à V est définie par $v = 0$;

– le feuilletage d'équation $\omega = 0$ restreint à V est colinéaire aux niveaux de u.

Puisque le groupe fondamental $\pi_1(V \setminus X, q)$, q appartenant à $V \setminus X$, est engendré par les classes d'homotopie à extrémités fixes de lacets à valeurs dans $\{u^{-1}(u(q))\} \setminus X$, on vérifie facilement en appliquant le théorème d'Hartogs que la restriction de l'intégrale première considérée à $V \setminus X$ s'étend en une fonction holomorphe sur V.

Toute intégrale première Nilsson f de ω est donc de la forme décrite dans le théorème 1.1. Il faut remarquer ici que le groupe de Poincaré du complément de S étant abélien, le groupe de monodromie de f lui même est abélien. On vérifie par ailleurs facilement que les formes normales formelles décrites dans le paragraphe 1.1 possèdent toutes des intégrales premières dans la classe de Nilsson.

Le théorème à démontrer s'énonce de la façon suivante.

Théorème 2.2. *Un germe ω de 1-forme holomorphe réduit possédant une intégrale première dans la classe de Nilsson est analytiquement conjugué à sa forme normale formelle.*

Preuve. La preuve que l'on produit ici s'écarte sensiblement de la preuve originale de [**13**], cette dernière reposant essentiellement sur le théorème d'approximation d'Artin.

Notons h le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $x = 0$ évalué sur la transversale $y = 1$. Visiblement, h agit par composition sur l'espace des déterminations de l'intégrale première f. Pour préciser cette action, il est commode d'utiliser le formalisme des faisceaux.

Soit $S_{\varepsilon,\theta} \subset \{y = 1\}$ le secteur défini par les deux conditions suivantes :

$$x \in \mathbb{C}, \ 0 < |x| < \varepsilon$$

$$|arg x - \theta| < \varepsilon \ ,$$

où ε est un réel strictement positif et θ appartient à $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Désignons par $V(f)_{\varepsilon,\theta}$ l'espace vectoriel engendré sur $S_{\varepsilon,\theta}$ par les restrictions des déterminations de f (cet espace n'ayant de sens que si ε

est assez petit). Pour chaque $\theta \in S^1$, considérons la limite inductive

$$V(f)_\theta = \lim_{\varepsilon \to 0} V(f)_{\varepsilon,\theta} .$$

La collection des $V(f)_\theta$ définit sur le cercle S^1 un faisceau $V(f)_{S^1}$ qu'il parait naturel d'appeler *faisceau des espaces vectoriels des germes sectoriels de déterminations de* f. Tout élément g d'une fibre de $V(f)_{S^1}$, par exemple $V(f)_0$, admet une écriture de la forme

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i(x)(\underline{log} x)^{n_i} \underline{x}^{\alpha_i}$$

où les a_i sont des germes de fonctions holomorphes, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ et les symboles $\underline{log} x$ et $\underline{x}^\alpha$ désignent les déterminations principales attachées aux fonctions $log x$ et x^α.

Soit $\delta : [0,1] \longrightarrow S^1$ un chemin joignant le point 0 à un point θ quelconque de S^1 (muni de la "coordonnée" θ). Par prolongement analytique des éléments de $V(f)_0$ le long de δ, on hérite d'un isomorphisme

$$M_\delta : V(f)_0 \longrightarrow V(f)_\theta .$$

Notons encore θ_h l'élément de S^1 correspondant à l'argument de $h'(0)$ et soit δ_h un chemin dans S^1 d'origine le point 0 et d'extrémité le point θ_h. L'action ζ du groupe $\mathcal{H}$ engendré par h sur la fibre $V(f)_0$ est définie de la façon suivante:

$$\zeta : \mathcal{H} \longrightarrow Aut_{\mathbb{C}} V(f)_0$$

$$h^m \longrightarrow \zeta(h^m)$$

où $\zeta(h^m)(g) = (M_{m\delta_h}(g)) \circ h^m$. Adjoignons à l'image de ζ, notée $Im\zeta$, le sous groupe G_0 de $Aut_{\mathbb{C}} V(f)_0$ engendré par tous les automorphismes de la forme M_δ où $\delta(0) = \delta(1) = 0$. Le groupe $G = (Im\zeta, G_0)$ s'identifie à un groupe commutatif de matrices: en effet, $V(f)_0$ est un espace de dimension finie et la monodromie de f est abélienne.

Lemme 2.3. *Il existe un sous espace vectoriel non trivial E de $V(f)_0$ de dimension au plus deux invariant par G qui, modulo un changement de coordonnées de la transversale $y = 1$, est de l'une des formes suivantes.*

1. $E = Vect_{\mathbb{C}}(\underline{x}^\gamma)$, $\gamma \in \mathbb{C}^*$.

2. $E = Vect_{\mathbb{C}}(\underline{log}x, 1)$.
3. $E = Vect_{\mathbb{C}}(\underline{x}^{\gamma}, 1)$, $\gamma \notin -\mathbb{N}$.
4. $E = Vect_{\mathbb{C}}(\lambda \underline{log}x + 1/x^n, 1)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. L'existence de E résulte de la triangularisation de G. Pour obtenir les descriptions énoncées, il suffit d'étudier l'action de G_0 sur E (voir [**13**] pour plus de détails).

Lorsque E est de la forme 1, 2 ou 3, on vérifie facilement que le difféomorphisme h d'holonomie est linéaire, ce qui implique que le germe ω est analytiquement linéarisable. Dans le quatrième cas, l'invariance de E entraine l'égalité

$$(M_{\delta_h}(g_0)) \circ h = g_0 + c_h, \;\; c_h \in \mathbb{C}$$

avec $g_0(x) = \lambda \underline{log}x + 1/x^n$. On a alors

$$h^* dg_0 = dg_0$$

et par dualité

$$h_* X_0 = X_0$$

où X_0 désigne le germe de champ de vecteurs holomorphe

$$X_0 = \frac{x^{n+1}}{\lambda x^n - n} \frac{\partial}{\partial x} \, .$$

D'après [**9**], le difféomorphisme h est analytiquement normalisable. Il en va de même pour le germe ω.

2.2. L'écriture explicite des intégrales premières dans la classe de Nilsson

L'objet de ce paragraphe est d'établir le

Théorème 2.4. *Soit ω un germe de 1-forme holomorphe réduit possédant une intégrale première f dans la classe de Nilsson et soit ω_f sa forme normale formelle. La fonction f s'écrit alors de l'une des trois façons suivantes.*

1. *Si $\omega_f = pydx + qxdy$,*

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x^p y^q) log(x^p y^q)^{n_i} (x^p y^q)^{\lambda_i}$$

où les α_i sont holomorphes, $n_i \in \mathbb{N}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

2. *Si* $\omega_f = \lambda y dx + x dy$, $\lambda \notin \mathbb{Q}$,

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i log(x^\lambda y)^{n_i} (x^\lambda y)^{\lambda_i}$$

où $n_i \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ *et* $\lambda_i \in \mathbb{C}$.

3. *Si* ω_f *est résonnante non linéaire,*

$$f = P\left(\int \frac{\omega_f}{g_f}\right)$$

où P *est un polynôme à coefficients complexes et* g_f *est le facteur intégrant de* ω_f *(défini à constante multiplicative près).*

Remarque. D'après le théorème 2.2, ω est analytiquement conjuguée à ω_f. Par ailleurs, il est clair réciproquement que les fonctions décrites en 1, 2 et 3 sont des intégrales premières de ω_f dans la classe de Nilsson.

Preuve du théorème.. Nous reprenons les notations introduites en 2.1. Soient X un champ de vecteurs holomorphe sur la transversale $y = 1$ et $\{b_1, \ldots, b_p\}$ une base de l'espace vectoriel $V(f)_0$. Rappelons que si $g_1, \ldots, g_n$ sont n éléments de $V(f)_0$, le *wronskien* $W_X(g_1, \ldots, g_n)$ de $g_1, \ldots, g_n$ par rapport à X est le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_n \\ Xg_1 & Xg_2 & \cdots & xg_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X^{(n-1)}g_1 & X^{(n-1)}g_2 & \cdots & X^{(n-1)}g_n \end{pmatrix}$$

qui est non identiquement nul si et seulement si les g_i forment un système libre de $V(f)_0$. Reprenant la théorie classique de Fuchs, en développant l'expression

$$\frac{W_X(g, b_1, b_2, \ldots, b_p)}{W_X(b_1, b_2, \ldots, b_p)} = 0 \ ,$$

on obtient une équation différentielle linéaire à coefficients méromorphes

$$X^{(p)}g + \sum_{i=1}^{p} a_{p-i} X^{(p-i)} g = 0 \qquad (E_X)$$

dont l'espace des solutions est précisément $V(f)_0$.

Nous nous proposons dans ce qui suit de construire de telles équations différentielles à l'aide de dérivations invariantes par le feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ d'équation $\omega = 0$. Pour cela, nous distinguons plusieurs cas.

1. La forme normale formelle ω_f s'écrit $\omega_f = pydx + qxdy$. L'intégrale première $x^p y^q$ est égale à x^p en restriction à la transversale $y = 1$; elle est invariante par le difféomorphisme d'holonomie $h(x) = exp(2i\pi/p)x$. Compte tenu de ce qui a été rappelé précédemment, les éléments g de $V(f)_0$ sont solutions d'une équation différentielle E_{X_0} où X_0 est le champ de vecteurs $(r^{-1})_*(x\partial/\partial x)$, r désignant la ramification $x \longmapsto x^p$. Il faut noter ici que X_0 est invariant par h, i.e. $h_* X_0 = X_0$.

Lemme 2.5. *Les coefficients a_i de l'équation E_{X_0} sont invariants par h.*

Preuve. On a en effet

$$a_i = \frac{N_{i,X_0}(b_1, b_2, \dots, b_p)}{W_{X_0}(b_1, b_2, \dots, b_p)}$$

avec

$$N_{i,X_0} = (-1)^i Det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_0^{(i-1)} b_1 & X_0^{(i-1)} b_2 & \cdots & X_0^{(i-1)} b_p \\ X_0^{(i+1)} b_1 & X_0^{(i+1)} b_2 & \cdots & X_0^{(i+1)} b_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_0^{(p)} b_1 & X_0^{(p)} b_2 & \cdots & X_0^{(p)} b_p \end{pmatrix}$$

En composant par h la première égalité, on obtient

$$a_i \circ h = \frac{N_{i,h_* X_0}(\zeta(h)(b_1), \zeta(h)(b_2), \dots, \zeta(h)(b_p))}{W_{h_* X_0}(\zeta(h)(b_1), \zeta(h)(b_2), \dots, \zeta(h)(b_p)}$$

et

$$a_i \circ h = \frac{N_{i,X_0}(\zeta(h)(b_1), \zeta(h)(b_2), \dots, \zeta(h)(b_p))}{W_{X_0}(\zeta(h)(b_1), \zeta(h)(b_2), \dots, \zeta(h)(b_p))}\,.$$

Ceci montre que

$$a_i \circ h = \frac{(Det(\mathcal{P}_h)) N_{i,X_0}(b_1, b_2, \dots, b_p)}{(Det(\mathcal{P}_h)) W_{X_0}(b_1, b_2, \dots, b_p)} = a_i$$

où $\mathcal{P}_h$ est la matrice de passage entre la base $\{b_1, \dots, b_p\}$ et la base $\{\zeta(h)(b_1), \dots, \zeta(h)(b_p)\}$.

Ainsi chaque a_i vérifie $a_i(x) = \widetilde{a}_i(x^p)$, $\widetilde{a}_i$ désignant une fonction méromorphe. L'équation E_{X_0} se redescend donc par r en une équation différentielle linéaire dont les solutions sont aussi dans la classe de Nilsson (r étant une application propre). On en déduit que tout élément g de $V(f)_0$ est de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x^p)\underline{l}og(x^p)^{n_i}(\underline{x}^p)^{\lambda_i} \ .$$

Puisque deux intégrales premières coincidant sur un facteur transverse coincident, on a démontré le point 1 du théorème.

2. La forme normale ω_f s'écrit $\omega_f = \lambda y dx + x dy$, $\lambda \notin \mathbb{Q}$. La fonction $x^\lambda y$ est intégrale première et le difféomorphisme d'holonomie h a pour expression $h(x) = exp(2i\pi/\lambda)x$. De façon analogue au cas précédent, en considérant le champ de vecteurs $X_0 = x\partial/\partial x$, on construit une équation différentielle E_{X_0} dont les coefficients sont constants (car invariants par h). Par suite, tout élément g de $V(f)_0$ est de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{k} e^{\lambda_i t} P_i(t)$$

où les P_i sont des polynômes et t vérifie $X.t = 1$. En choisissant $t = logx$, on obtient

$$g(x) = \sum_{i=1}^{k} x^{\lambda_i} P_i(logx) = \sum_{i=1}^{k} x^{\lambda_i} Q_i(logx^\lambda)$$

où les Q_i appartiennent à $\mathbb{C}[x]$.

3. La forme normale ω_f est résonnante non linéaire. D'après le lemme 2.3, le sous espace vectoriel E de $V(f)_0$ (invariant par l'holonomie h) est engendré par la constante 1 et l'élément g_0 de $V(f)_0$ d'écriture $g_0(x) = \lambda \underline{l}ogx + 1/x^n$; par conséquent, le champ de vecteurs

$$X_0 = \frac{x^{n+1}}{\lambda x^n - n} \frac{\partial}{\partial x}$$

est invariant par h. Puisque les orbites de ce dernier accumulent l'origine, les coefficients de l'équation différentielle E_{X_0} sont encore constants et tout élément g de $V(f)_0$ est de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} e^{\lambda_i g_0} P_i(g_0)$$

où les P_i sont des polynômes. On vérifie facilement que la croissance modérée de l'intégrale première f impose que tous les λ_i soient nuls de sorte que $g = P_g(g_0)$ avec P_g appartenant à $\mathbb{C}[x]$.

La fonction g_0 est par construction la restriction d'une intégrale première Nilsson G_0 dont la monodromie est additive et telle que $f = P_f(G_0)$. Ainsi, il existe une fonction φ uniforme et méromorphe telle que $\omega_f = \varphi dG_0$. Ceci termine la preuve du théorème puisqu'il est bien connu qu'un tel facteur intégrant est en fait holomorphe.

3. Intégrales premières liouvilliennes et petits diviseurs

Dans ce paragraphe ω désigne un germe de 1-forme holomorphe réduit dont le 1-jet est holomorphiquement conjugué à $xdy+\lambda ydx$ où le *nombre caractéristique* λ appartient à $\mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q}$.

3.1. Quelques rappels

Le germe ω est toujours formellement conjugué à sa partie linéaire $\omega_\lambda = ydx + \lambda xdy$. Ceci signifie qu'il existe une unité formelle $\widehat{u}$ et un difféomorphisme formel $\widehat{\psi}$ tels que l'on ait

$$\widehat{\psi}^* \omega = \widehat{u} \omega_\lambda .$$

De plus, puisque $\widehat{\psi}$ envoie (formellement) les séparatrices de ω sur les séparatrices de ω_λ, il est de la forme

$$\widehat{\psi}(x, y) = (xe^{\widehat{\psi}_1(x,y)}, ye^{\widehat{\psi}_2(x,y)})$$

où les $\widehat{\psi}_i$ sont des éléments de $\mathbb{C}[[x, y]]$.

Rappelons pour mémoire (nous ne l'utiliserons pas par la suite) que ω est analytiquement conjugué à sa partie linéaire si et seulement si λ satisfait la condition diophantienne de Brujno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{log(q_{n+1})}{q_n} < \infty$$

où $(p_n/q_n)_{n\geq 1}$ désigne la suite des réduites associée à la décomposition en fractions continues de λ ([**5**] et [**14**]).

3.2. Un théorème de linéarisation

Il s'énonce de la façon suivante.

Théorème 3.1. *Un germe ω de 1-forme holomorphe réduit dont le nombre caractéristique est irrationnel positif est analytiquement linéarisable si et seulement s'il possède une intégrale première liouvillienne.*

Preuve. Notons η le facteur intégrant généralisé de ω. D'après [**3**] il est de la forme

$$\eta = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + d\left(\frac{F}{x^m y^n}\right)$$

où α et β sont des nombres complexes, m et n sont des entiers et F est un germe de fonction holomorphe. On constate que

$$\widehat{\eta} = \widehat{\psi}^*\eta - \frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}}$$

est un facteur intégrant généralisé formel de ω_λ qui est encore de la forme

$$\widehat{\eta} = \alpha\frac{dx}{x} + \beta\frac{dy}{y} + d\left(\frac{\widehat{H}}{x^m y^n}\right)$$

où $\widehat{H}$ est une série formelle.

Puisque la fonction $g(x,y) = xy$ est facteur intégrant de ω_λ, il vient

$$\left(\widehat{\eta} - \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right) \wedge \omega_\lambda = 0,$$

ce qui signifie qu'il existe une série formelle $\widehat{G}$ telle que

$$\widehat{\eta} - \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \frac{\widehat{G}}{x^{m+1}y^{n+1}}\omega_\lambda$$

ou encore que le quotient $x^{m+1}y^{n+1}/\widehat{G}$ est facteur intégrant de ω_λ. Dès lors, le quotient $x^m y^n/\widehat{G}$ est une intégrale première de ω_λ et est donc constant. On en déduit que

$$\widehat{\eta} - \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = \mu\left(\frac{dx}{x} + \lambda\frac{dy}{y}\right), \quad \mu \in \mathbb{C},$$

à savoir que $\widehat{\eta}$, donc η, est à pôles simples. Ainsi l'intégrale première liouvillienne de ω est dans la classe de Nilsson et ω est analytiquement linéarisable (d'après le théorème 2.2).

4. A propos de la classification des germes de difféomorphismes résonnants

Le but de ce paragraphe est d'établir un résultat préliminaire concernant les cocycles d'un difféomorphisme résonnant possédant une fonction invariante d'un certain type. Pour être en mesure de l'énoncer, il nous faut d'abord rappeler comment on décrit la classe analytique d'un tel difféomorphisme à partir de son espace d'orbites.

4.1. Espaces d'orbites et classes analytiques

Nous reprenons l'exposé de [**7**]. Il convient de distinguer deux cas.

1. Le cas tangent à l'identité. Tout germe h de difféomorphisme holomorphe tangent à l'identité est formellement conjugué à une unique forme normale

$$h_f(z) = \exp\left(\frac{2i\pi z^{k+1}}{1+\nu z^k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

où ν est un nombre complexe et k un entier. Cette forme normale possède un certain nombre de fonctions invariantes et il est important de noter que ce qui suit dépend explicitement du choix de l'une d'entre elles. Nous privilégions la fonction

$$F_f(z) = z^{-\nu}\exp\left(\frac{1}{kz^k}\right) .$$

Soit j appartenant à $\{0, 1, \ldots , 2k-1\}$, on pose $\theta_j = -\pi/2k + j\pi/k$. Notons encore V_j les secteurs définis par

$$V_j = \{\ |z| < \varepsilon,\ \theta_j - (\frac{\pi}{k} - \delta) < Arg(z) < \theta_j + (\frac{\pi}{k} - \delta)\ \}$$

où δ est choisi correctement de sorte que les V_j forment un bon recouvrement du disque $D_\varepsilon = \{|z| < \varepsilon\}$, ε étant un réel positif arbitrairement petit. Soient $F_f^0, \ldots , F_f^{2k-1}$ les déterminations de F_f sur $V_0, \ldots , V_{2k-1}$ suivant la détermination principale du logarithme. On vérifie que F_f^j

identifie l'espace quotient V_j/h_f à une sphère de Riemann non séparée notée S_j. Pour obtenir l'espace des orbites de h_f, on recolle les sphères S_j comme suit : $\infty \in S_0$ est identifié à $\infty \in S_1$ par l'identité, $0 \in S_1$ est identifié à $0 \in S_2$ par l'identité, ..., $\infty \in S_{2k-2}$ est identifié à $\infty \in S_{2k-1}$ par l'identité et $0 \in S_{2k-1}$ est identifié à $0 \in S_0$ par le difféomorphisme $\sigma_\nu(z) = exp(-2i\pi\nu)z$, monodromie de F_f autour de l'origine.

On obtient alors l'espace des orbites de h (formellement conjugué à h_f) en remplaçant dans la construction précédente l'identité par k couples

$$\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^0, \varphi_{2j}^\infty) \in \mathrm{Diff}_1(S_{2j}; 0, \infty) \quad j = 0, 1, ..., k-1,$$

de difféomorphismes locaux de la sphère en $(0, \infty)$ tangents à l'identité en chacun de ces points. Plus précisément, $\infty \in S_0$ est identifié à $\infty \in S_1$ par φ_0^∞, $0 \in S_1$ est identifié à $0 \in S_2$ par $\varphi_2^0, \ldots, \infty \in S_{2k-2}$ est identifié à $\infty \in S_{2k-1}$ par φ_{2k-2}^∞ et $0 \in S_{2k-1}$ est identifié à $0 \in S_0$ par le composé $\sigma_\nu \circ \varphi_0^0$.

Compte tenu des choix faits[1], la classe analytique de h est déterminée par les *cocycles "caractéristiques"* φ_{2j} définis *modulo conjugaison par un difféomorphisme global de la sphère de Riemann fixant l'origine et l'infini* (c'est à dire modulo une homothétie $y \longmapsto ay$ où a est un nombre complexe non nul).

2. Le cas résonnant non tangent à l'identité. Lorsque $h'(0) = e^{2i\pi p/q}$, la forme normale formelle est du type

$$h_f = e^{2i\pi p/q} exp\left(\frac{2i\pi z^{qk+1}}{1 + \nu z^{qk}} \frac{\partial}{\partial z}\right) .$$

On vérifie sans peine que h_f est un ramifié de

$$H_f = exp\left(\frac{2i\pi q u^{k+1}}{1 + \nu u^k} \frac{\partial}{\partial u}\right)$$

où $u = \chi(x) = x^q$. Notons $\mathcal{V}$ le recouvrement de D_ε associé à H_f. Il est formé de $2k$ ouverts sectoriels notés $(V_j)_{j=0,1,\ldots,2k-1}$. Chaque $\widetilde{V}_j =$

[1]Nous avons fixé une fonction invariante et la numérotation des sphères.

$\chi^{-1}(V_j)$ est constitué de q secteurs disjoints échangés transitivement par la rotation $z \longmapsto e^{2i\pi p/q}z$ et ses itérés. La fonction[2]

$$F_f(x) = x^{-m} u^{\frac{(-\nu+mq)}{q^2}} e^{\frac{1}{q^2 k u^k}}$$

où $mp \equiv 1$ (q) et m est un entier, sépare les orbites de h_f sur $\widetilde{V}_j$. Ainsi l'espace des orbites de h_f s'obtient en recollant $2k$ sphères de Riemann comme indiqué dans le cas 1, la monodromie de F_f étant l'homothétie

$$z \longmapsto e^{-2i\pi(\frac{\nu-mq}{q^2})} z \ .$$

De la même façon, l'espace des orbites d'un germe h formellement conjugué à h_f s'obtient en remplaçant l'identité dans les recollements précédents par k couples

$$\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^0, \varphi_{2j}^\infty) \in \mathrm{Diff}_1(S_{2j}; 0, \infty)$$

avec $j = 0, 1, \ldots, k-1$. La classe analytique de h est encore donnée par ces k couples définis modulo une action par un élément de $\mathbb{C}^*$.

4.2. Calcul des cocycles en présence de fonctions invariantes

Le résultat énoncé dans ce paragraphe et les hypothèses utilisées sont justifiés à posteriori par la suite de notre travail (voir les paragraphes 5 et 6).

On se fixe un germe de difféomorphisme holomorphe résonnant h réalisé sur un disque D_ε et on suppose qu'il existe une fonction f vérifiant les deux hypothèses:

1. f est multiforme sur D_ε^* à monodromie additive.
2. $f \circ h(z) = \alpha f(z) + \beta$ où α et β sont des nombres complexes, α étant non nul.

Le point 2 signifie précisément que la fonction f se factorise en une fonction multiforme f_j sur chaque sphère S_j de l'espace des orbites de h privée des deux pôles. Compte tenu des applications que nous avons en vue, nous faisons les hypothèses supplémentaires:

3. Les seuls points critiques éventuels de f_j sont l'origine et l'infini.

[2] On fait choix d'un logarithme sur V_j.

4. f_j est à croissance modérée en l'origine et à l'infini.

Proposition 4.1. *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses 1,2,3 et 4, on a l'alternative suivante.*

1. *Le difféomorphisme h est analytiquement normalisable.*
2. *Les cocycles caractéristiques φ_{2j} de h sont soit des couples (id, τ_{2j}^n) soit des couples (τ_{2j}^n, id) où id désigne l'identité et les τ_{2j}^n sont des homographies τ_{2j} ramifiées à un même ordre n ne dépendant pas de j.*

Remarques. Une homographie ramifiée à l'ordre n n'est rien d'autre qu'un difféomorphisme obtenu en "conjuguant" une homographie par l'application qui à z associe z^n. Par ailleurs, puisqu' une base de l'espace des déterminations de f pour l'action de h est donnée par le couple $(1, f)$ on constate qu'en jordanisant la matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

on se ramène à l'un des trois cas suivants:

1. $f \circ h = \alpha f$ si $\alpha \neq 1$.
2. $f \circ h = f + 1$.
3. $f \circ h = f$.

La preuve qui suit montre alors que seul le troisième cas est à même de produire des cocycles φ_{2j} non triviaux (d'où le titre du paragraphe).

Preuve de la proposition. Nous commençons par déterminer la fonction f_j pour chacun des trois cas précédents.

Lemme 4.2. *Sur la sphère S_j de l'espace des orbites de h munie de la coordonnée z_j héritée de l'identification $V_j/h \simeq S_j$, la fonction f_j s'écrit*

1. $f_j = a_j z_j^{\lambda + n_j}$, *où $n_j \in \mathbb{Z}$ et $a_j \in \mathbb{C}$ (cas 1).*
2. $f_j = \dfrac{1}{2i\pi} log z_j + b_j$, *où $b_j \in \mathbb{C}$ (cas 2).*
3. $f_j = a_j z_j^{n_j} + b_j$, *où $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ et $n_j \in \mathbb{Z}$ (cas 3).*

Preuve. Nous ne traitons que le premier cas, on procède de façon analogue pour les autres. Soit λ un nombre complexe tel que $exp(2i\pi\lambda) =$

α. Puisque la fonction f_j/z_j^λ est uniforme et à croissance modérée en l'origine et à l'infini, il existe un polynôme P et un entier m tels que:

$$\frac{f_j}{z_j^\lambda} = \frac{P(z_j)}{z_j^m} .$$

La dérivée f_j' de f_j est de la forme:

$$f_j' = z_j^{\lambda-m-1}(z_j P'(z_j) + (m-\lambda)P(z_j)) .$$

Puisque les seuls points critiques éventuels de f_j sont l'origine et l'infini, il existe un entier positif ou nul p et un nombre complexe c tels que

$$z_j P'(z_j) + (m-\lambda)P(z_j) = c z_j^p .$$

Les solutions polynômiales de cette équation différentielle s'écrivent:

$$P(z_j) = \frac{c}{p+m-\lambda} z_j^p$$

et l'on obtient

$$f_j = \frac{c}{p+m-\lambda} z_j^{\lambda+(p-m)} .$$

Remarques. La fonction f est multiforme sur D_ε^* de monodromie affine. Dans la suite, nous choisissons de faire agir cette monodromie au niveau du recollement qui met en jeu $0 \in S_{2k-1}$ et $0 \in S_0$, là où l'éventuel difféomorphisme σ intervient.

Nous conservons toujours les mêmes hypothèses et les mêmes notations.

Lemme 4.3. *Soit S_{2j} une sphère du chapelet des orbites de h avec $j \neq 0$. Le point $0 \in S_{2j}$ est identifié au point $0 \in S_{2j-1}$ par φ_{2j}^0 et le point $\infty \in S_{2j}$ est identifié au point $\infty \in S_{2j+1}$ par φ_{2j}^∞. Le cocycle $\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^0, \varphi_{2j}^\infty)$ s'il n'est pas trivial est de l'une des deux formes suivantes:*

i. $\varphi_{2j} = (id, \tau_{2j}^{n_{2j}})$

ii. $\varphi_{2j} = (\tau_{2j}^{n_{2j}}, id)$

où $\tau_{2j}^{n_{2j}}$ désigne une homographie τ_{2j} ramifiée à l'ordre $|n_{2j}| \in \mathbb{N}$.

Preuve. Puisque les déterminations de f se recollent sur les secteurs V_{2j-1}, V_{2j} et V_{2j+1}, on a les relations suivantes:

$$\begin{cases} f_{2j}(\varphi_{2j}^{0}(z_{2j-1})) = f_{2j-1}(z_{2j-1}) \\ f_{2j+1}(\varphi_{2j}^{\infty}(w_{2j})) = f_{2j}(w_{2j}) \end{cases}$$

où w_i désigne la variable $1/z_i$.

Il n'est pas difficile de vérifier que pour les cas 1 et 2 ces relations impliquent que le cocycle φ_{2j} est trivial. Nous nous attardons donc sur le cas 3.

i. Supposons dans un premier temps que $f_{2j}(z_{2j}) = a_{2j}z_{2j}^{n_{2j}} + b_{2j}$ où a_{2j}, b_{2j} sont des nombres complexes et n_{2j} est un entier positif. Il vient:

$$a_{2j}(\varphi_{2j}^{0}(z_{2j-1}))^{n_{2j}} + b_{2j} = a_{2j-1}z_{2j-1}^{n_{2j-1}} + b_{2j-1} \ .$$

Ainsi φ_{2j}^{0} est l'identité , $a_{2j} = a_{2j-1}$, $b_{2j} = b_{2j-1}$ et $n_{2j} = n_{2j-1}$.

En considérant la seconde égalité, on obtient:

$$a_{2j+1}\frac{1}{(\varphi_{2j}^{\infty}(w_{2j}))^{n_{2j+1}}} + b_{2j+1} = a_{2j}\frac{1}{(w_{2j})^{n_{2j}}} + b_{2j} \ .$$

On a alors $a_{2j+1} = a_{2j}$, $n_{2j} = n_{2j+1}$ et

$$\varphi_{2j}^{\infty}(w_{2j}) = \tau_{2j}^{n_{2j}}(w_{2j}) = \frac{w_{2j}}{\left(1 + \frac{b_{2j}-b_{2j+1}}{a_{2j}}(w_{2j})^{n_{2j}}\right)^{1/n_{2j}}} \ .$$

ii. Le cas où n_{2j} est négatif, qui se traite de façon analogue, conduit à l'assertion ii. du lemme.

Il ne nous reste qu'à déterminer le cocycle φ_0.

Lemme 4.4. *Le cocycle* $\varphi_0 = (\varphi_0^0, \varphi_0^{\infty})$ *correspondant à la sphère* S_0 *du chapelet des orbites de* h*, s'il n'est pas trivial, est de l'une des deux formes suivantes:*

i. $\varphi_0 = (id, \tau_0^{n_0})$

ii. $\varphi_0 = (\tau_0^{n_0}, id)$

où $\tau_0^{n_0}$ *désigne une homographie* τ_0 *ramifiée à l'ordre* $|n_0|$.

Preuve. Il suffit de reprendre la démonstration du lemme précédent en tenant compte toutefois de la modification suivante: les relations liant les déterminations de f sur V_{2k-1}, V_0 et V_1 s'écrivent désormais:

$$\begin{cases} f_0(\sigma_\nu \circ \varphi_0^0(z_{2k-1})) = Af_{2k-1}(z_{2k-1}) + B \\ f_1(\varphi_0^\infty(w_0)) = f_0(w_0) \end{cases}$$

où A et B sont des nombres complexes. Ces relations se traduisent notamment dans le cas n_0 positif par:

$$\begin{cases} a_0(\sigma_\nu \circ \varphi_0^0(z_{2k-1}))^{n_0} + b_0 = A(a_{2k-1}z_{2k-1}^{n_{2k-1}} + b_{2k-1}) + B \\ a_1\frac{1}{(\varphi_0^\infty(w_0))^{n_1}} + b_1 = a_0\frac{1}{(w_0)^{n_0}} + b_0 \end{cases}$$

Ceci achève la preuve de la proposition 4.1 modulo la remarque qui suit.

Remarque. On vérifie facilement que tous les entiers n_j sont égaux à un même entier relatif n. Cet entier mesure le défaut d'injectivité de la fonction f sur les orbites de h. Lorsque f est injective, on a évidemment $n = \pm 1$.

5. Formes résonnantes dégénérées et intégrales premières liouvilliennes

Dans ce qui suit ω désigne un germe de 1-forme holomorphe résonnant dégénéré de forme normale formelle

$$\omega_f = x^{k+1}dy - y(1 + \mu x^k)dx \ .$$

On suppose que ω possède un facteur intégrant généralisé η et n'est pas analytiquement isomorphe à ω_f. Notons encore h le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $x = 0$ de ω évalué sur la transversale $y = 1$.

5.1. Calcul des cocycles de l'holonomie

Nous avons déjà constaté que la 1-forme β_0 obtenue en restreignant la forme fermée

$$\beta = \frac{\omega}{exp(\int \eta)}$$

à la transversale $y = 1$ vérifie: $h^*\beta_0 = c_h\beta_0$ où c_h est une nombre complexe non nul. Fixons pour la suite un point base * appartenant à un disque D_ε où l'on réalise simultanément les germes étudiés. La fonction f définie par:

$$f(z)=\int_*^z \beta_0$$

satisfait évidemment $f\circ h = c_h f + d_h$ où d_h appartient à $\mathbb{C}$.

Remarque. Puisque h est dans le cas présent tangent à l'identité, la constante c_h est nécessairement égale à 1.

Lemme 5.1. *La fonction f est multiforme sur D_ε^* à monodromie affine.*

Preuve. Il suffit de remarquer que la 1-forme β_0 est à monodromie multiplicative.

On a par ailleurs le résultat suivant.

Lemme 5.2. *La forme $\eta_{/y=1}$ possède un pôle d'ordre $k+1$ à l'origine.*

Preuve. Notons $\widehat{\psi}(x,y)=(x,\widehat{\phi}(x,y))$ le difféomorphisme formel tel que

$$\widehat{\psi}^*(x^{k+1}dy - yP(x)dx)=\widehat{u}\omega$$

où $\widehat{u}$ est une unité formelle et P un polynôme de degré inférieur ou égal à k tel que $P(0)\neq 0$ (cf [**6**]). La forme normale $x^{k+1}dy - yP(x)dx$ possède deux facteurs intégrants généralisés: $\eta_1=(k+1)dx/x+dy/y$ et $\eta_2=(k+1)dx/x+P(x)dx/x^{k+1}$. On a donc deux égalités

$$(k+1)\frac{dx}{x}+\frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}}-\frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}}-\eta=\mu_1\frac{\omega}{\widehat{g}} \qquad (*)_1$$

$$\frac{(k+1)x^k+P(x)}{x^{k+1}}dx-\frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}}-\eta=\mu_2\frac{\omega}{\widehat{g}}, \qquad (*)_2$$

où $\widehat{g}=x^{k+1}\widehat{\phi}$ est le facteur intégrant formel de ω et μ_1 et μ_2 sont des nombres complexes. Distinguons deux cas.

1. Si $\mu_1\neq 0$, on obtient en restreignant $(*)_1$ à la transversale $y=1$,

$$(k+1)\frac{dx}{x}+\frac{d\widehat{\phi}(x,1)}{\widehat{\phi}(x,1)}-\frac{d\widehat{u}(x,1)}{\widehat{u}(x,1)}-\eta_{/y=1}=\mu_1\frac{v(x)dx}{x^{k+1}\widehat{\phi}(x,1)}$$

où $\widehat{\phi}(x,1)$, $\widehat{u}(x,1)$ et $v(x)$ sont des unités formelles. Ceci montre que $\eta_{/y=1}$ admet un pôle d'ordre $k+1$.

2. Si $\mu_1 = 0$, on s'intéresse à $(*)_2$. Lorsque $\mu_2 = 0$, la conclusion est évidente. Supposons donc $\mu_2 \neq 0$. En combinant $(*)_1$ et $(*)_2$, il vient

$$\frac{P(x)}{x^{k+1}}dx - \frac{d\widehat{\phi}}{\widehat{\phi}} = \mu_2 \frac{\omega}{x^{k+1}\widehat{\phi}}$$

ce qui signifie que

$$\widehat{\psi}^*(x^{k+1}dy - yP(x)dx) = \mu_2\omega$$

ou encore que l'unité formelle $\widehat{u}$ est constante. Dans ce cas, $\eta = \widehat{\psi}^*\eta_2$.

Remarque. La 1-forme β_0 s'écrit

$$\beta_0 = u(t)t^{\alpha_1} exp\left(\frac{\alpha_2}{t}\right) \dots exp\left(\frac{\alpha_{k+1}}{t^k}\right) dt$$

où u est une unité holomorphe et les α_j sont des nombres complexes, α_{k+1} étant non nul.

La fonction f se factorise sur chaque sphère S_j du chapelet des orbites de h en une fonction f_j multiforme. Compte tenu de l'écriture de β_0, les seuls points critiques éventuels de f_j sont l'origine et l'infini.

Il nous faut désormais controler la croissance de f_j au voisinage des pôles de S_j.

Lemme 5.3. *La fonction f_j est à croissance modérée à l'origine et en l'infini.*

Preuve. Il suffit de s'assurer que la limite du module $|f_j(z_j)|$ existe lorsque l'on fait tendre z_j vers l'origine ou vers l'infini.

On constate que:

1. La fonction

$$f(z) = \int_*^z \beta_0 = \int_*^z u(t)t^{\alpha_1} exp\left(\frac{\alpha_2}{t}\right) \dots exp\left(\frac{\alpha_{k+1}}{t^k}\right) dt$$

tend vers une limite finie (resp. vers l'infini) lorsque z tend vers l'origine dans la partie $\Re(\alpha_{k+1}/z^k) < 0$ (resp. dans la partie $\Re(\alpha_{k+1}/z^k) > 0$) de D_ε.

2. Le point z_j de S_j tend vers l'origine (resp. vers l'infini) si et seulement si le point z de V_j tend vers l'origine dans le secteur $\Re(1/z^k) < 0$ (resp. $\Re(1/z^k) > 0$).

Il suffit donc pour prouver le lemme de montrer que le nombre complexe α_{k+1} est réel. Supposons par l'absurde qu'il existe une branche de l'ensemble $\Re(1/z^k) = 0$ contenue dans un secteur S où $\Re(\alpha_{k+1}/z^k)$ est strictement négatif. Compte tenu de la dynamique de h dans S et de la relation $f \circ h = f + d_h$, on peut étendre f en une fonction holomorphe à décroissance exponentielle d'ordre k sur un secteur d'ouverture strictement supérieure à π/k. D'après le lemme de Watson ([**11**]), ceci implique que f est identiquement nulle, ce qui n'est pas le cas. Ainsi les branches de l'ensemble $\Re(1/z^k) = 0$ coincident avec les branches de l'ensemble $\Re(\alpha_{k+1}/z^k) = 0$ et α_{k+1} est un nombre réel.

Les hypothèses 1,2,3 et 4 de la proposition 4.1 sont finalement vérifiées. Les cocycles de h sont donc du type décrit dans l'énoncé de cette dernière.

5.2. Rappels sur la classification par l'espace des feuilles

Nous expliquons comment obtenir la classe analytique d'un germe ω de 1-forme holomorphe résonnant dégénéré de forme normale formelle

$$\omega_f = x^{k+1}dy - y(1 + \mu x^k)dx \ .$$

Nous reprenons une nouvelle fois l'exposé de [**6**]. La démarche est analogue à celle suive en 4.1.

On introduit les secteurs W_j définis par

$$W_j = \{\ |x| < \varepsilon,\ \theta_j - (\frac{\pi}{k} - \delta) < Arg(x) < \theta_j + (\frac{\pi}{k} - \delta)\ \}$$

où $\theta_j = -\pi/2k + j\pi/k$ et j appartient à l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 2k-1\}$. Sur chaque produit $W_j \times D_\varepsilon$, les feuilles du feuilletage $\mathcal{F}_\omega$ d'équation $\omega = 0$ s'identifient aux courbes d'équation

$$y = cx^\mu exp(-1/kx^k)$$

où c est un nombre complexe. En particulier, l'espace des feuilles de la restriction $\mathcal{F}_j$ de $\mathcal{F}_\omega$ à $W_j \times D_\varepsilon$ s'identifie à la droite complexe. La classe analytique de l'équation $\omega = 0$ est caractérisée par k cocycles

$\psi_0,\ \psi_2,\ \ldots\ ,\ \psi_{2k-2}$ où chaque ψ_{2j} est un couple noté[3]

$$\psi_{2j} = (\psi_{2j}^0, \psi_{2j}^\infty)\ ,$$

formé de transformations isotropes associées respectivement à la partie $\Re(x^k) < 0$ et $\Re(x^k) > 0$ du secteur W_{2j}. Il résulte de la proposition 6.1 de **[6]** que les ψ_{2j}^∞ sont des translations (des homographies si l'on se place à l'infini) et les ψ_{2j}^0 sont des difféomorphismes locaux en l'origine tangent à l'identité.

Remarque importante. L'équation $\omega = 0$ admet une solution analytique $y = u(x)$ avec $u(0) = 0$ si et seulement si toutes les homographies ψ_{2j}^∞ sont l'identité.

L'un des résultats clé pour la suite est le suivant (cf. **[6]**).

Théorème 5.4. *Soit ω un germe de 1-forme holomorphe résonnant dégénéré de forme normale formelle ω_f. L'équation $\omega = 0$ est une équation de Riccatti si et seulement si les éléments ψ_{2j}^0 des cocycles ψ_{2j} sont des homographies.*

Précisons pour finir les liens qui unissent les cocycles ψ_{2j} relatifs à ω_f et les cocycles φ_{2j} relatifs à h_f.

A tout cocycle φ_{2j}^0 (resp. φ_{2j}^∞) correspond un cocycle *sectoriel* ϖ_{2j}^0 (resp. ϖ_{2j}^∞) défini sur le secteur $V_{2j}^- = V_{2j} \cap (\Re(x^k) < 0)$ (resp. $V_{2j}^+ = V_{2j} \cap (\Re(x^k) > 0)$) de la transversale $y = 1$. Notons ρ l'application

$$x \longmapsto \rho(x) = x^{-\mu} exp\left(\frac{1}{kx^k}\right)\ .$$

On démontre alors que:

1. l'application ρ induit un isomorphisme de groupes entre l'ensemble des cocycles sectoriels ϖ_{2j}^0 sur V_{2j}^- et l'ensemble des cocycles ψ_{2j}^0.

2. Sur un secteur V_{2j}^+, l'application ρ n'induit plus un isomorphisme: elle identifie l'ensemble des cocycles ψ_{2j}^∞ à un sous groupe à un paramètre de l'ensemble des cocycles sectoriels ϖ_{2j}^∞.

5.3. Interprétation: le lien avec les équations de Riccati

Voici le résultat

[3] par analogie au cas des difféomorphismes

Proposition 5.5. *Un germe ω de 1-forme holomorphe résonnant dégénéré possèdant un facteur intégrant généralisé et qui n'est pas analytiquement isomorphe à sa forme normale formelle ω_f est holomorphiquement conjugué à un germe $\underline{\omega}$ de l'un des trois types suivants.*
1. $\underline{\omega} = x^{k+1}dy + (a(x)y + b(x))dx$ *où* $a(0) \neq 0$ *et* $b(0) = 0$.
2. $\underline{\omega} = x^{k+1}dy + (a(x)y^2 + b(x))dx$ *où* $b(0) \neq 0$ *et* $a(0) = 0$.
3. $\underline{\omega} = x^{k+1}dy + (a(x)y^n + b(x)y)dx$ *où* $b(0) \neq 0$ *et* $a(0) = 0$.

Preuve. 1. Supposons dans un premier temps que les cocycles de h sont de la forme

$$\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^0, \varphi_{2j}^\infty) = (id, \tau_{2j})$$

où les τ_{2j} sont des homographies. Dans ce cas les éléments ψ_{2j}^0 des cocycles ψ_{2j} sont réduits à l'identité et compte tenu du théorème 5.4, l'équation $\omega = 0$ est holomorphiquement conjuguée à une équation de Riccati

$$\omega_1 = x^{k+1}dy + (a(x)y^2 + b(x)y + c(x))dx \ .$$

En considérant l'application $\chi(x,y) = (x, 1/y)$, on obtient une nouvelle équation de Riccati

$$\omega_2 = y^2\chi^*\omega = -x^{k+1}dy + (a(x) + b(x)y + c(x)y^2)dx$$

pour laquelle les nouveaux éléments ψ_{2j}^∞ sont l'identité. Il en résulte que l'équation $\omega_2 = 0$ possède une séparatrice analytique $y = u(x)$, avec $u(0) = 0$.

Lemme 5.6. *Le changement de variables*

$$\underline{\chi}(x,y) = \left(x, \frac{y}{1 + u(x)y}\right)$$

ramène l'équation $\omega_1 = 0$ *à une équation*

$$\underline{\omega} = (1 + u(x)y)^2 \underline{\chi}^* \omega_1 = 0$$

qui est linéaire en y.

Preuve. C'est un calcul élémentaire laissé au lecteur.

2. Supposons désormais que les cocycles de h soient de la forme

$$\varphi_{2j} = (\tau_{2j}, id)$$

où les τ_{2j} sont des homographies. Nous allons montrer que l'équation $\omega = 0$ est holomorphiquement conjuguée à une équation de Riccati possédant deux séparatrices analytiques.

Pour ce faire, considérons une équation linéaire $\omega_1 = 0$ ayant pour cocycles des couples (id, ψ_{2j}^{∞}). Cette équation possède une intégrale première liouvillienne (c'est la méthode de la variation de la constante) et les cocycles du difféomorphisme h_1 d'holonomie de ω_1 sont des couples $(id, \widetilde{\psi}_{2j}^{\infty})$ où les $\widetilde{\psi}_{2j}^{\infty}$ sont des homographies. La correspondance $\psi_{2j}^{\infty} \longmapsto \widetilde{\psi}_{2j}^{\infty}$ réalise ici un isomorphisme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ et on peut trouver ψ_{2j}^{∞} tels que $\widetilde{\psi}_{2j}^{\infty} = \tau_{2j}$. Ainsi l'équation $\omega = 0$ est analytiquement conjuguée à l'équation de Riccati obtenue en transformant l'équation $\omega_1 = 0$ en $\underline{\omega} = y^2 \chi^* \omega_1 = 0$ où $\chi(x,y) = (x, 1/y)$.

3. Considérons maintenant le cas où les cocycles de h sont de la forme

$$\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^{0}, \varphi_{2j}^{\infty}) = (\tau_{2j}^{n}, id)$$

où les τ_{2j}^{n} sont des homographies τ_{2j} ramifiées à un certain ordre n ne dépendant pas de j.

Soit ω_1 l'équation linéaire dont le difféomorphisme d'holonomie h_1 a des cocycles de la forme (id, τ_{2j}). Posons $\chi_n(x,y) = (x, 1/y^n)$. La forme ω_1 donne naissance par image réciproque à une forme résonnante dégénérée

$$\underline{\omega} = \left(\frac{y^{n+1}}{n}\right) \chi_n^* \omega_1 = x^{k+1} dy - \frac{1}{n}\left(a(x)y + b(x)y^{n+1}\right) dx \; .$$

Notons $\underline{h}$ le difféomorphisme d'holonomie de $\underline{\omega}$.

Lemme 5.7. *La forme $\underline{\omega}$ possède un facteur intégrant généralisé $\underline{\eta}$ qui s'écrit*

$$\underline{\eta} = \eta_1 + (n+1)\frac{dy}{y}$$

où η_1 désigne le facteur intégrant généralisé de ω_1. On a de plus

$$\underline{\beta} = \frac{-1}{n}\beta_1$$

en notant $\underline{\beta}$ (resp. β_1) la restriction à la droite $y = 1$ de la forme

$$\frac{\underline{\omega}}{exp(\int \underline{\eta})} \quad \left(resp. \ \frac{\omega_1}{exp(\int \eta_1)}\right) .$$

Preuve. Il s'agit là encore d'un calcul tout à fait élémentaire.

On déduit de ce lemme que la fonction f_1 primitive de β_1 est invariante par les deux difféomorphismes d'holonomie h_1 et $\underline{h}$. Puisque les cocycles de h_1 sont des homographies, la fonction f_1 est injective sur les orbites de ce dernier. Par contre f_1 est de degré n sur les orbites de $\underline{h}$: en effet $f_1^{-1}(c)$ est constitué d'une unique orbite de h_1 c'est à dire de n orbites de $\underline{h}$. On vérifie alors facilement que les cocycles de $\underline{h}$ sont précisément les couples

$$\varphi_{2j} = (\tau_{2j}^n, id) .$$

4. Le cas restant, à savoir celui où les cocyles de h sont de la forme

$$\varphi_{2j} = (id, \tau_{2j}^n)$$

les τ_{2j}^n étant des ramifications d'homographies, ne se produit pas. En effet, Nous avons déjà épuisé dans le cas 1 toute l'image de la correspondance

$$\psi_{2j}^{\infty} \longmapsto \varphi_{2j}^{\infty} .$$

5.4. Exemples: variations sur l'équation d'Euler

1. Elle s'écrit $\omega = x^2dy - (y+x)dx = 0$. Son facteur intégrant généralisé est la forme méromorphe

$$\eta = \frac{2x+1}{x^2}dx .$$

En intégrant l'équation par la méthode de la variation de la constante, on obtient l'intégrale première

$$y = e^{-1/x}\left(\int_0^x \frac{dt}{t}e^{1/t} + C\right)$$

qui est bien liouvillienne. Notons que le changement de variable $1/t - 1/x = -\zeta/x$ ramène cette dernière équation à

$$y = -\int_0^{-\infty} e^{-\zeta/x}\frac{d\zeta}{1-\zeta}$$

qui n'est autre que la resommée Borel - Laplace de la série d'Euler:

$$\widehat{u}(x) = \sum_{n\geq 1}(n-1)!x^n \ .$$

La fonction invariante f est la restriction de l'intégrale première à la transversale $y = 1$, i.e.

$$f(z) = e^{1/z} - \int_0^z \frac{dt}{t} e^{1/t}.$$

2. Considérons maintenant la forme $\underline{\omega} = 2x^2dy + y(1+xy^2)dx = -y^3\chi_2^*\omega$ où $\chi_2(x,y) = (x, 1/y^2)$. Notons $\underline{\eta}$ le facteur intégrant généralisé de $\underline{\omega}$, il s'écrit:

$$\underline{\eta} = \frac{2x+1}{x^2}dx + \frac{3dy}{y} \ .$$

La restriction de la forme fermée

$$\frac{\underline{\omega}}{exp(\int \underline{\eta})}$$

à la droite $y = 1$ s'écrit

$$\underline{\beta}_0 = \frac{(1+x)dx}{x^2e^{-1/x}} \ .$$

Par conséquent, la fonction invariante - notons la encore f - primitive de la 1-forme $\underline{\beta}_0$ n'est rien d'autre que la fonction invariante associée à l'équation d'Euler (au signe près).

6. Le cas des formes résonnantes non dégénérées

On s'intéresse ici à un germe ω de 1-forme holomorphe résonnant non dégénéré de forme normale formelle

$$\omega_f = p(1 + (\mu-1)(x^py^q)^k)ydx + q(1 + \mu(x^py^q)^k)xdy$$

possédant un facteur intégrant généralisé η. Dans la suite, on suppose ω non analytiquement isomorphe à ω_f.

6.1. Calcul des cocycles de l'holonomie

Notons h le difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $x = 0$ de ω évalué sur la transversale $y = 1$. Nous commençons par établir un analogue du lemme 5.2.

Lemme 6.1. *La forme $\eta_{/y=1}$ possède un pôle d'ordre $pk+1$ en l'origine.*

Preuve. Notons $\widehat{\psi}$ et $\widehat{u}$ le difféomorphisme formel et l'unité formelle tels que

$$\widehat{\psi}^*\omega = \widehat{u}\omega_f \ .$$

Puisque la 1-forme formelle

$$\widehat{\psi}^*\eta + \frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}}$$

est un facteur intégrant généralisé de ω_f, il existe un nombre complexe ν qui est non nul et qui vérifie

$$\widehat{\psi}^*\eta + \frac{d\widehat{u}}{\widehat{u}} - \frac{dg_f}{g_f} = \nu\frac{\omega_f}{g_f}$$

où $g_f(x,y) = (xy)(x^py^q)^k$ désigne le facteur intégrant de ω_f. En restreignant l'égalité précédente à la transversale $y = 1$, on obtient le résultat.

Exemple. Il sera repris à la fin du paragraphe 6.2. Le germe $\omega = y(1+x)dx + x(1+x-xy)dy$ admet pour facteur intégrant généralisé la forme

$$\eta = \frac{2xy+1}{x^2y^2}(xdy+ydx) - \frac{dy}{y}$$

dont la restriction à la droite $y = 1$ est

$$\eta_{/y=1} = \frac{2x+1}{x^2}dx \ .$$

Comme précédemment, on considère maintenant la fonction f définie par

$$f(z) = \int_*^z \beta_0$$

où $*$ est un point base fixé et β_0 désigne la restriction de la forme

$$\beta = \frac{\omega}{exp(\int \eta)}$$

à la transversale $y = 1$. La fonction f vérifie par construction: $f \circ h = c_h f + d_h$ où c_h et d_h sont des nombres complexes. Notons une nouvelle fois f_j la fonction multiforme induite par f sur la sphère S_j du chapelet des orbites de h. En reprenant les mêmes arguments que dans le paragraphe 5 et compte tenu du lemme 6.1, on montre que f_j est encore à croissance modérée à l'origine et à l'infini. On peut appliquer la proposition 4.1 et déterminer ainsi les cocycles de h.

6.2. La réalisation effective des cocycles

Le but ici est d'expliquer comment décrire des formes résonnantes possédant un facteur intégrant généralisé pour lesquelles les cocycles de h sont fixés.

Considérons tout d'abord le cas où $p = q = 1$. La forme normale formelle ω_f s'écrit

$$\omega_f = (1 + (\mu - 1)(xy)^k)ydx + (1 + \mu(xy)^k)xdy \ .$$

Proposition 6.2. *Soit ω un germe de 1-forme holomorphe résonnant de forme normale formelle ω_f (où $p = q = 1$) possédant un facteur intégrant généralisé et soit h le difféomorphisme holonomie de la séparatrice $x = 0$ de ω. Le germe ω est holomorphiquement conjugué au germe en $(y = 0, s = x/y = 0)$ de l'éclaté divisé d'un germe $\underline{\omega}$ résonnant dégénéré*

- *de type 1 si le cocycles de h sont des couples (id, τ_{2j})*
- *de type 2 si les cocycles de h sont des couples (τ_{2j}, id)*
- *de type 3 si les cocycles de h sont des couples (τ_{2j}^n, id)*

(les notations étant celles de la proposition 5.5)

Preuve de la proposition. Supposons dans un premier temps que les cocycles de h soient du type (id, τ_{2k}). Soit

$$\underline{\omega} = x^{p+1}dy + (a(x)y + b(x))dx, \quad b(0) = 0, \quad a(0) \neq 0$$

l'équation linéaire correspondante et soit $\pi(s, y) = (sy, y)$ le morphisme d'éclatement de l'origine. On a

$$\widetilde{\omega} = \frac{\pi^*\omega}{y} = s(s^p y^p + a(sy) + s\underline{b}(sy))dy + y(a(sy) + s\underline{b}(sy))ds$$

où l'on note $b = x\underline{b}$. Le germe $\widetilde{\omega}_0$ de $\widetilde{\omega}$ en $(0, 0)$ est résonnant. L'holonomie $\underline{h}$ de la séparatrice $x = 0$ de $\underline{\omega}$ est holomorphiquement conjuguée à l'holonomie h_0 de la séparatrice $s = 0$ de $\widetilde{\omega}_0$. Ceci signifie encore que h et h_0 sont holomorphiquement conjugués.

On procède de façon analogue dans les autres cas. Les détails sont laissés au lecteur.

Il ne reste plus qu'à réaliser les cocyles du type (id, τ^n_{2j}). Pour ce faire, on procède de la façon suivante. Soit $\underline{\omega}$ un germe de 1-forme holomorphe résonnant dégénéré dont les cocyles sont (τ^n_{2j}, id). En éclatant $\underline{\omega}$ comme précédemment, on obtient un germe $\widetilde{\omega}_0$ de 1-forme holomorphe résonnant dont le difféomorphisme d'holonomie attaché à la séparatrice $s = 0$ a pour cocyle (τ^n_{2j}, id).

Lemme 6.3. *Avec les notations introduites, les cocycles du difféomorphisme d'holonomie k_0 de la séparatrice $y = 0$ de $\widetilde{\omega}_0$ sont (id, τ^n_{2j}).*

Preuve. Le germe $\widetilde{\omega}_\infty$ de l'éclaté de $\underline{\omega}$ en $x = 0$ et $t = y/x = 0$ est une 1-forme résonnante dégénérée possédant deux séparatrices analytiques. Les cocycles du difféomorphisme k_∞ de la séparatrice $x = 0$ sont donc du type (φ^0_{2j}, id). Un raisonnement simple sur les chapelets de sphères[4] montre que, compte tenu de l'égalité $k_0 = k_\infty^{-1}$, les cocycles de k_0 sont nécessairement de la forme $(id, \varphi^\infty_{2j})$. Par ailleurs, l'application de Dulac associée à $\widetilde{\omega}_0$ produit un isomorphime entre les espaces d'orbites de h_0 et k_0. Les cocycles de h_0 étant (τ^n_{2j}, id), on en déduit que l'isomorphisme considéré consiste à échanger les pôles de chaque sphère. Ainsi $\varphi^\infty_{2j} = \tau^n_{2j}$.

Il suffit maintenant, pour obtenir un germe ω tel que les cocycles de l'holonomie de la séparatrice $x = 0$ soient du type voulu, de faire subir à $\widetilde{\omega}_0$ la transformation $(s, y) \longmapsto (y, x)$.

Nous dirons dans la suite qu'un germe ω de 1-forme holomorphe résonnant est de "type (p, q)", p et q étant deux entiers positifs premiers entre eux, si sa forme normale s'écrit

$$\omega_f = p(1 + (\mu - 1)(x^p y^q)^k) y dx + q(1 + \mu(x^p y^q)^k) x dy \ .$$

Notons par ailleurs $\chi_{p,q}$ l'application qui à (x, y) associe (x^p, y^q). On a le résultat suivant.

Proposition 6.4. *Soit ω_0 un germe de 1-forme holomorphe de type $(1, 1)$ possédant un facteur intégrant généralisé η_0. On suppose les cocycles de*

---

[4]nous avons déjà utilisé implicitement cette propriété dans le paragraphe précédent pour "retourner" les cocycles d'une équation linéaire avec second membre et obtenir les cocycles d'une équation de Riccati.

son holonomie h_0 non triviaux. La forme

$$\omega = \frac{\chi^*_{p,q}\omega_0}{x^{p-1}y^{q-1}}$$

possède alors un facteur intégrant généralisé η et les cocycles de son holonomie h sont obtenus en ramifiant les cocycles de h_0 par l'application $z \longmapsto z^{pq}$.

Il est ainsi possible de réaliser les cocycles "ramifiés" par certaines formes de type (p,q).

Preuve de la proposition. Soit f_0 (resp. f) la fonction invariante de h_0 (resp. h) primitive de la forme

$$\frac{\omega_0}{exp(\int \eta_0)} \quad \left(\text{resp. } \frac{\omega}{exp(\int \eta)}\right)$$

restreinte à la droite $y = 1$. Un calcul élémentaire montre que $f_0(x^p) = f$.

Lemme 6.5. *Si f_0 est de degré n sur les orbites de h_0, f est de degré npq sur les orbites de h.*

Preuve. Puisque le niveau $f_0 = c$ est constitué de n orbites de h_0, le niveau $f_0(x^p) = f = c$ renferme np orbites du difféomorphisme ϕ tangent à l'identité ramifié de h_0 par $x \longmapsto x^p$. On a par ailleurs

$$h = (e^{2i\pi/p}\phi)^q \ .$$

Les np orbites de ϕ donnent naissance à np orbites de $exp(2i\pi/p)\phi$ donc à npq orbites de h, d'où le résultat.

Le chapelet des orbites de h_0 est constitué de $2k$ sphères S_i munies des coordonnées z_i et recollées par les cocycles φ_{2j}. Pour construire le chapelet des orbites de h, on considère les $2k$ sphères S_i munies des coordonnées $\zeta_i = z_i^{pq}$ recollées par les cocycles ψ_{2j} ramifiés des cocycles φ_{2j} à l'ordre pq.

Un algorithme de réalisation des cocycles. On dispose en fait d'un algorithme tout à fait général permettant de construire des formes résonnantes de type (p,q) possédant des cocycles donnés de la forme (τ^n_{2j}, id) ou (id, τ^n_{2j}). Sa mise en évidence résulte des constatations suivantes. Fixons un germe ω de 1-forme résonnante de type (p,q). Dans un système de coordonnées adéquat, ω s'écrit

$$\omega = p(1+u^k b(x,y))ydx + qxdy$$

où $u = x^p y^q$ désigne la variable résonnante et b est une unité holomorphe (se référer à [**7**]). On observe alors que l'éclaté divisé $\widetilde{\omega}$ de ω admet au voisinage de l'origine de la carte $(s = y/x, y)$ et après renormalisation par $(x,y) \longmapsto (s,y)$ le même type d'écriture, à savoir

$$\widetilde{\omega} = p(1+\widetilde{u}^k \widetilde{b}(x,y))ydx + (p+q)xdy$$

où $\widetilde{u} = x^p y^{p+q}$ et $\widetilde{b}$ est une unité.

Par construction les difféomorphismes d'holonomie des germes ω et $\widetilde{\omega}$ associés à la séparatrice $x = 0$ sont analytiquement conjugués, ce qui implique qu'ils ont même espace d'orbites. Pour des raisons analogues à celles invoquées plus haut, on constate que ce dernier est obtenu à partir du chapelet de shères associé au difféomorphisme d'holonomie de la séparatrice $y = 0$ en inversant les pôles de chacune des sphères. Notons par ailleurs $a_0, \ldots, a_n$ les entiers apparaissant successivementdans la décomposition en fractions continues du rationnel q/p, i.e. $a_i = \mathrm{Ent}[x_i]$ où

$$x_i = \frac{1}{x_{i-1} - a_{i-1}}$$

et $x_0 = q/p$.

L'algorithme cherché est le suivant: partons d'un germe ω de type $(1,1)$ écrit sous la forme

$$\omega = (1+u^k b(x,y))ydx + xdy$$

avec des cocycles d'holonomie prescrits du type (τ_{2j}^n, id) ou (id, τ_{2j}^n) (que l'on sait réaliser effectivement d'après la proposition 6.2 et le lemme 6.3). La première étape consiste à éclater a_n fois ω suivant la procédure décrite ci-dessus pour obtenir un germe ω_n auquel on applique la permutation $(x,y) \longmapsto (y,x)$. On recommence ensuite cette opération en remplaçant a_n par a_{n-1} puis a_{n-1} par a_{n-2} et ceci jusqu'à ce que l'on soit amené à considérer l'entier a_0. On termine alors en éclatant a_0 fois le dernier germe calculé. On vérifie que l'on a bien ainsi construit une 1-forme résonnante de type (p,q) réalisant les cocycles donnés.

Terminons ce paragraphe par un exemple, il est obtenu en éclatant l'équation d'Euler

$$\omega = x^2 dy - (y+x)dx = 0.$$

En posant $\pi(t,y) = (ty, y)$, il vient

$$\widetilde{\omega} = -\frac{\pi^*\omega}{y} = t(1+t-ty)dy + y(1+t)dt.$$

Les singularités sont données par $y = 0$ et $t = 0$ ou $t = -1$. En $(0,0)$, la singularité est résonnante non dégénérée de type $(1,1)$. Le 1-jet de $\widetilde{\omega}$ en $y = 0$, $u = 1+t = 0$ est $-(u+y)dy$. Puisque l'équation d'Euler n'a qu'une seule séparatrice, le noeud col $(u = 0, y = 0)$ n'a pas de séparatrice sortante. Il n'est donc pas normalisable analytiquement. On en déduit que la singularité résonnante non dégénérée $(t = 0, y = 0)$ n'est pas analytiquement normalisable. On vérifie facilement que

$$\widetilde{\eta} = \pi^*\eta - \frac{dy}{y} = \pi^*\left(\frac{2x+1}{x^2}dx\right) - \frac{dy}{y}$$

est un facteur intégrant généralisé de $\widetilde{\omega}$.

7. Remarques à propos d'un énoncé de type Galois

Nous nous proposons de donner dans ce dernier paragraphe quelques idées qui pourraient permettre de resituer les résultats obtenus précédemment au sein d'une théorie de Galois pour les germes d'équations différentielles holomorphes non linéaires du premier ordre. Nous nous limitons pour simplifier l'exposé à des germes de difféomorphismes holomorphes tangents à l'identité. On procèderait de façon analogue pour traiter les cas résonnants généraux. Nous reprenons les notations introduites dans le paragraphe 4. Il semble naturel de proposer la définition suivante.

Définition. Soit h un germe de difféomorphisme holomorphe tangent à l'identité dont les cocycles φ_{2j}, éléments de $\mathrm{Diff}_1(S; 0, \infty)$ (S est la sphère de Riemann), sont notés $\varphi_{2j} = (\varphi_{2j}^0, \varphi_{2j}^\infty)$ pour $j = 0, \ldots, 2k-1$. Le *pseudo-groupe de Galois de h*, $\mathrm{Gal}(h)$, est le pseudo-groupe de $\mathrm{Diff}(S; 0, \infty)$ engendré par les φ_{2j} et les homothéties.

Le pseudo-groupe Gal(h) contient deux groupes de germes de difféomorphismes holomorphes Gal$_0$ et Gal$_\infty$ engendrés respectivement par les φ^0_{2j} et les homothéties et les φ^∞_{2j} et les homothéties. Si les cocycles de h sont du type (τ^n_{2j}, id) ou du type (id, τ^n_{2j}) le pseudo-groupe Gal(h) se réduit à l'un de ces deux groupes et il est résoluble.

Si l'on suppose maintenant que Gal(h) est résoluble, il est raisonnable de demander que Gal$_0$ et Gal$_\infty$ le soient. Il est bien connu que tout groupe résoluble de germes de difféomorphismes holomorphes est formellement conjugué à une ramification d'un groupe d'homographies ([4]); dans le cas présent ce résultat peut être précisé.

Lemme 7.1. *Le groupe* Gal$_0$ *(resp.* Gal$_\infty$*) est résoluble si et seulement si les composantes* φ^0_{2j} *(resp.* φ^∞_{2j}*) sont des homographies ramifiées à un ordre* n_0 *(resp.* n_∞*) ne dépendant que de* h.

Preuve. Nous raisonnons sur Gal$_0$ que nous supposons résoluble. Soit φ un élément de Gal$_0$ tangent à l'identité et τ_a l'homothétie $z \longmapsto az$. Le composé $\varphi_a = \tau_a \circ \phi \circ \tau_a^{-1}$ est encore tangent à l'identité et commute avec φ. En écrivant

$$\varphi(z) = exp\widehat{f}(z)\frac{\partial}{\partial z}$$

où $\widehat{f}$ est une série formelle d'ordre deux, on obtient

$$\varphi_a(z) = exp\frac{1}{a}\widehat{f}(az)\frac{\partial}{\partial z} .$$

Dire que φ et φ_a commutent équivaut à dire que les champs formels logarithmes de ces difféomorphismes sont proportionnels, i.e. il existe un nombre complexe λ tel que

$$\widehat{f}(z)\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\lambda}{a}\widehat{f}(az)\frac{\partial}{\partial z} .$$

On vérifie facilement que si τ_a est une rotation d'angle irrationel $\widehat{f}$ doit necessairement être un monôme, ce qui implique le résultat.

Supposons dans un premier temps que $n_0 = n_\infty$. Quitte à déramifier le pseudo-groupe Gal en changeant la variable z de S par z^{1/n_0}, on se ramène à la situation où Gal$_0$ et Gal$_\infty$ sont des groupes d'homographies. On constate alors que Gal(h) est résoluble si et seulement si soit Gal$_0$

soit Gal_∞ est trivial: en effet le groupe de $PSL(2;\mathbb{C})$ engendré par une homographie et une translation n'est pas résoluble. Si maintenant n_0 est différent de n_∞, on vérifie que l'algèbre de Lie engendrés par les champs de vecteurs rationnels logarithmes des composantes φ^0_{2j} et φ^∞_{2j} des cocycles de h ne peut être résoluble puisque de dimension infinie.

References

[1] G. D. Birkhoff, *Déformations analytiques et fonctions auto-équivalentes.* Collected Mathematical Papers, vol 3, AMS.

[2] A. D. Brujno, *Analytical form of differential equations.* Trans. Moscou Math. Soc. **25:** (1971), 131-288.

[3] D. Cerveau & J.-F. Mattei, *Formes intégrables holomorphes singulières.* Astérisque 97.

[4] D. Cerveau & R. Moussu, *Groupes d'automorphismes de* $(\mathbb{C},0)$ *et équations différentielles* $ydy + \ldots = 0$. Bull. Soc. Math. France, **116:** (1988), 459-488.

[5] J. Martinet, *Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brujno).* Séminaire Bourbaki, Nov. 1980, exp. 564.

[6] J. Martinet & J.-P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre.* Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. **55:** (1982).

[7] J. Martinet & J.-P. Ramis, *Classification analytique des équations différentielles non linéaires résonnantes du premier ordre.* Ann. Sci. École Normale Sup. **16:** (1983).

[8] J.-F. Mattei & R. Moussu, *Holonomie et intégrales premières.* Ann. Sci. École Normale Sup. **13:** (1980).

[9] E. Paul, *Formes singulières à holonomie résoluble.* Prébublication 64, Labo. de Math. É. Picard, 1995 (Toulouse).

[10] M. P. Painlevé, *Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles.* Bull. Soc. Math. **28:** (1904), 193-204.

[11] J.-P. Ramis, *Séries divergentes et théories asymptotiques.* Panoramas et synthèses, Soc. Math. de France, Tome 121, 1993.

[12] M.-F. Singer, *Liouvillian first integrals of differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **333:** 1992.

[13] F. Touzet, *Équations différentielles admettant des solutions liouvilliennes.* Thèse de l'Université de Rennes 1, 1995.

[14] J.-C. Yoccoz, *Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de* $(\mathbb{C},0)$. C. R. Acad. Sci. Paris 306n, p. 55-58.

M. Berthier
Département de Mathématiques
Pôle Sciences et Technologie,
Université de La Rochelle

Avenue Marillac, 17042 La Rochelle Cedex 1,
France

e-mail: michel.berthier@univ-lr.fr

F. Touzet
IMR, Campus Beaulieu,
Université de Rennes 1,
35042 Rennes cedex.
France

e-mail: ftouzet@maths.univ-rennes1.fr